LA II – 1: Trigonalisierbarkeit von Matrizen

Folgende Begriffe, Konzepte und Sätze sollten am Ende des Sheets verstanden sein: - charakteristisches Polynom - geometrische/algebraische Vielfachheit - Trigonalisierbarkeit von Matrizen

---

Wir erinnern uns: lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über einem Körper K werden durch darstellende Matrizen (eindeutig für eine feste Wahl der Basen) beschrieben. Endomorphismen entsprechen dann quadratischen Matrizen.

Für eine quadratische Matrix A mit n Zeilen und Spalten ist das **charakteristische Polynom** definiert als das Polynom $\det(tI - A)$ in t, wobei I die Identitätsmatrix gleicher Größe ist. Wir sehen, dass das charakteristische Polynom Grad n hat.

Denkanstoß: Warum hat das charakteristische Polynom Grad n?

Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass A in sein eigenes charakteristisches Polynom eingesetzt 0 ergibt.

Mit Julia kann das charakteristische Polynom so berechnet werden:

In [1]:
```
using SymPy;
```

In [2]:
```
A = sympy.Matrix([1 2 3; 2 1 2; 3 2 1])
```

Out[2]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
A.charpoly()
```

Out[3]:
$$\operatorname{PurePoly}\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 14\lambda - 8, \lambda, domain = \mathbb{Z}\right)$$

Für ein Element λ des Körpers K definieren wir zudem die **algebraische Vielfachheit** $\operatorname{alg}(A, \lambda)$ als die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom und die **geometrische Vielfachheit** $\operatorname{geo}(A, \lambda)$ als die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $A - \lambda I$.

Denkanstoß: Wie hängen diese Defintionen vom Körper K ab?

Es gilt stets $\operatorname{geo}(A, \lambda) \leq \operatorname{alg}(A, \lambda)$.

Zwei Matrizen A und B heißen **ähnlich** oder **konjugiert**, wenn es eine invertierbare Matrix Q gibt, so dass $QAQ^{-1} = B$. Eine Matrix heißt **trigonalisierbar**, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist.

Über einem beliebigen Körper gilt:

$$\begin{gathered} A \text{ ist trigonalisierbar} \\ \Leftrightarrow \text{das charakteristische Polynom von } A \text{ zerfällt in Linearfaktoren} \end{gathered}$$

Somit ist jede Matrix über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (z.B. $\mathbb{C}$) trigonalisierbar.

Denkanstoß: Wieso gilt diese Äquivalenz?

Aufgabe 1 (B.Sc. und Lehramt) *** Sei nun $K = \mathbb{C}$ und $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & -6 & 4 & 0 & 1 \\ 10 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 66 & -6 & -10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 1. Erkläre, warum für jede Matrix A und jedes $\lambda \in K$ gilt: $\operatorname{geo}(A, \lambda) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{alg}(A, \lambda) > 0$ 2. Berechne das charakteristische Polynom von A_1 und alle geometrischen und algebraischen Vielfachheiten, die nicht 0 sind. 3. Verifiziere den Satz von Cayley-Hamilton für A_1. 4. Entscheide, ob A_1 trigonalisierbar ist.

In [4]:
```
A1 = sympy.Matrix([1 -1 1 0 0; 13 -3 1 0 1; 12 -6 4 0 1; 10 -5 3 -1 2; 66 -
```

Out[4]:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & -6 & 4 & 0 & 1 \\ 10 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 66 & -6 & -10 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

In [5]:

```
###LÖSUNG AUFGABE 1



###ENDE
```

Aufgabe 2 (B.Sc. und Lehramt) *** Sei wieder $K = \mathbb{R}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ Ist A_2 trigonalisierbar? Falls ja, berechne die Trigonalform von A_2.

In [6]:

```
###LÖSUNG AUFGABE 2



###ENDE
```