# Integrabilitätsbedingungen in der Geometrie

Arne Lorenz

Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen

15.12.2006

# Motivation

Sei $X^n$ eine Mannigfaltigkeit

- Fast symplektische Struktur:
    - $n = 2m$
    - 2-Form $\quad \omega \in \Gamma \bigwedge^2 T^* X \quad$ (nicht ausgeartet)

$\rightsquigarrow$ symplektisch: $\quad d\omega = 0$

# Motivation

Sei $X^n$ eine Mannigfaltigkeit

- Fast symplektische Struktur:
  - $n = 2m$
  - 2-Form $\quad \omega \in \Gamma \bigwedge^2 T^* X \quad$ (nicht ausgeartet)

  $\rightsquigarrow$ symplektisch: $\quad d\omega = 0$
- Riemannsche Struktur:
  - Metrik $\quad g \in \Gamma S^2 T^* X \quad$ (positiv definit)

  $\rightsquigarrow$ integrabel: Konstante skalare Krümmung

# Motivation

Sei $X^n$ eine Mannigfaltigkeit

- Fast symplektische Struktur:
  - $n = 2m$
  - 2-Form $\quad \omega \in \Gamma \bigwedge^2 T^*X \quad$ (nicht ausgeartet)

  $\rightsquigarrow$ symplektisch: $\quad d\omega = 0$
- Riemannsche Struktur:
  - Metrik $\quad g \in \Gamma S^2 T^*X \quad$ (positiv definit)

  $\rightsquigarrow$ integrabel: Konstante skalare Krümmung
- Fast komplexe Struktur:
  - $X^{2m}$ reell
  - Endomorphismus $\quad J : TX \to TX \quad$ mit $J^2 = -\,\mathrm{id}$

  $\rightsquigarrow$ komplexe Struktur:

$$[J, J] = 0 \qquad \text{Nijenhuis-Tensor}$$

# Gliederung

# Gliederung

# Riemannsche Struktur – Invarianzgleichungen

- Metrik = symmetrische Bilinearform auf $TX$:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots \\ g_{12} & g_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

- Transformation unter Diffeomorphismen $y = \varphi(x)$:

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right)^{tr} g(y) \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\right) = g(x)$$

# Riemannsche Struktur – Invarianzgleichungen

- Metrik = symmetrische Bilinearform auf $TX$:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots \\ g_{12} & g_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

- Transformation unter Diffeomorphismen $y = \varphi(x)$:

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right)^{tr} g(y) \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\right) = g(x)$$

- Invarianzgleichungen ($y^i_k \equiv \frac{\partial y^i}{\partial x^k}$):

$$\mathcal{R}_1 : \quad y^i_k \, y^j_l \, g_{ij}(y) = g_{kl}(x) \qquad \text{(Summenkonvention)}$$

- Allgemein: $\mathcal{R}_q$ definiert eine Teilmannigfaltigkeit im Jetraum $J_q(X \times X)$ mit Koordinaten $x, y, y^i_j, \dots y_q$.

# Elementare Operationen

- Prolongation $\mathcal{R}_q \rightsquigarrow \mathcal{R}_{q+1}$:

$$\mathcal{R}_q : \quad \phi^\tau(x, y, y_q) = 0 \qquad \tau = 1, \ldots, r$$

$$\mathcal{R}_{q+1} : \left\{ \begin{array}{rcll} \phi^\tau(x,\, y,\, y_q) & = & 0 & \\ D_i\phi^\tau(x,\, y,\, y_{q+1}) & = & 0 & i = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

# Elementare Operationen

- Prolongation $\mathcal{R}_q \rightsquigarrow \mathcal{R}_{q+1}$:

$$\mathcal{R}_q : \quad \phi^\tau(x, y, y_q) = 0 \qquad \tau = 1, \dots, r$$

$$\mathcal{R}_{q+1} : \begin{cases} \phi^\tau(x,\, y,\, y_q) & = & 0 \\ D_i\phi^\tau(x,\, y,\, y_{q+1}) & = & 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

- Projektion: $\pi_q^{q+1} : \mathcal{R}_{q+1} \to \mathcal{R}_q$:
  Eliminiere alle $q + 1$-ten Ableitungen:

$$A_\tau^i(x,\, y,\, y_q) D_i \phi^\tau$$

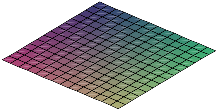
- $\pi_q^{q+1}$ ist *surjektiv*, wenn alle neuen Gleichungen $q$-ter Ordnung bereits Kombinationen der alten sind:

$$A(x,\, y,\, y_q) D_i \phi + B(\phi) = 0$$

# Beispiel 1

Flache Metrik:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



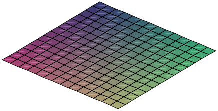
- Invarianzgleichungen:

$$(y_1^1)^2 + (y_1^2)^2 = 1 \quad y_1^1\, y_2^2 + y_2^1\, y_1^2 = 0 \quad (y_2^1)^2 + (y_2^2)^2 = 1$$

# Beispiel 1

Flache Metrik:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Invarianzgleichungen:

$$(y_1^1)^2 + (y_1^2)^2 = 1 \quad y_1^1\, y_2^2 + y_2^1\, y_1^2 = 0 \quad (y_2^1)^2 + (y_2^2)^2 = 1$$

- 1. Prolongation:

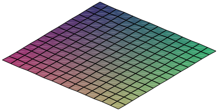
$$2y_1^1\, y_{12}^1 + 2y_1^2\, y_{12}^2 = 0, \qquad 2y_2^1\, y_{12}^1 + 2y_2^2\, y_{12}^2 = 0,$$

+ 4 weitere Gleichungen

# Beispiel 1

Flache Metrik:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Invarianzgleichungen:

$$(y_1^1)^2 + (y_1^2)^2 = 1 \quad y_1^1\, y_2^2 + y_2^1\, y_1^2 = 0 \quad (y_2^1)^2 + (y_2^2)^2 = 1$$

- 1. Prolongation:

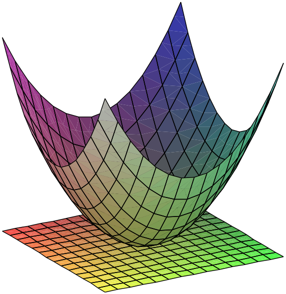
$$2y_1^1\, y_{12}^1 + 2y_1^2\, y_{12}^2 = 0, \qquad 2y_2^1\, y_{12}^1 + 2y_2^2\, y_{12}^2 = 0,$$

  + 4 weitere Gleichungen
- 2. Prolongation: 12 Gleichungen
- Projektion: Keine neuen Gleichungen

# Beispiel 2

Metrik

$$g = (1+(x^1)^2+(x^2)^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2. Prolongation + Projektion ergibt:

$$\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2\right] C(x^1, x^2, y^1, y^2) = 0$$

mit $C > 0$

Gleichungen

# Formale Integrabilität

Sei $\mathcal{R}_q$ ein PDE-System $q$-ter Ordnung.

## Definition

$\mathcal{R}_q$ heißt *formal integrabel*, wenn für alle $r, s \in \mathbb{N}_0$

$$\pi^{q+r+s}_{q+r} : \mathcal{R}_{q+r+s} \to \mathcal{R}_{q+r}$$

surjektiv ist.

## Satz (Goldschmidt 1967)

*$\mathcal{R}_q$ ist formal integrabel, wenn:*

- *das Symbol von $\mathcal{R}_q$ 2-azyklisch und*
- $\pi^{q+1}_q : \mathcal{R}_{q+1} \to \mathcal{R}_q$ *surjektiv ist.*

# Gliederung

# Jetgruppoide

Betrachte Gleichungen

$$\mathcal{R}_q : \qquad \phi^\tau(x, y, y_q) = 0$$

für die gilt:

- Lösungen $\varphi$, $\psi$ von $\mathcal{R}_q$ sind Diffeomorphismen.
- $\varphi \circ \psi$ und $\varphi^{-1}$ sind auch Lösungen.
- $\mathcal{R}_q$ ist transitiv: Keine Gleichung $\phi^\rho(x, y) = 0$

## Satz (Lie 1891)

*Es existieren Differentialinvarianten $\Phi^\tau(y,\, y_q)$, so daß $\mathcal{R}_q$ durch*

$$\Phi^\tau(y,\, y_q) = \omega^\tau(x)$$

*gegeben ist.*

# Folgerungen

- Natürliches Bündel $\mathcal{F} \to X$, Koordinaten $u^\tau = \Phi^\tau$
- Schnitt $\omega$ von $\mathcal{F} \leftrightarrow$ geometrisches Objekt
- Invarianzgleichung für $\omega$:

$$\mathcal{R}_q(\omega): \quad \Phi^\tau_\omega(\omega(y), y_q) = \omega^\tau(x)$$

# Folgerungen

- Natürliches Bündel $\mathcal{F} \to X$, Koordinaten $u^\tau = \Phi^\tau$
- Schnitt $\omega$ von $\mathcal{F} \leftrightarrow$ geometrisches Objekt
- Invarianzgleichung für $\omega$:

$$\mathcal{R}_q(\omega): \quad \Phi^\tau_\omega(\omega(y),\, y_q) = \omega^\tau(x)$$

- Prolongation + Projektion:

$$A_\tau(\Phi_\omega) D_i \Phi^\tau_\omega$$

ist unabhängig von $y_{q+1}$ für alle $\omega$.

# Folgerungen

- Natürliches Bündel $\mathcal{F} \to X$, Koordinaten $u^\tau = \Phi^\tau$
- Schnitt $\omega$ von $\mathcal{F} \leftrightarrow$ geometrisches Objekt
- Invarianzgleichung für $\omega$:

$$\mathcal{R}_q(\omega): \quad \Phi^\tau_\omega(\omega(y),\, y_q) = \omega^\tau(x)$$

- Prolongation + Projektion:

$$A_\tau(\Phi_\omega) D_i \Phi^\tau_\omega$$

  ist unabhängig von $y_{q+1}$ für alle $\omega$.
- Gilt für ein $\omega$:

$$A_\tau(\Phi_\omega) D_i \Phi^\tau_\omega + B(\Phi_\omega) = 0,$$

  so ist $\pi^{q+1}_q$ surjektiv, wenn gilt:

$$A_\tau(\omega(x))\, \partial_i \omega^\tau(x) + B(\omega(x)) = 0.$$

# Integrabilitätstheorem

- Integrabilitätsbedingungen:

$$I^\alpha(u, u_x) = A^\alpha(u)u_x + B^\alpha(u)$$

- Vektorbündel $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}$ mit Koordinaten $u^\tau = \Phi^\tau$, $v^\alpha = I^\alpha$

### Satz

*Die Projektion $\pi_q^{q+1} : \mathcal{R}_{q+1}(\omega) \to \mathcal{R}_q(\omega)$ ist genau dann surjektiv, wenn ein äquivarianter Schnitt:*

$$c : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_1$$

*existiert, der die Vessiot-Strukturgleichungen erfüllt:*

$$I(\omega, \partial_i \omega) = c(\omega).$$

# Gliederung

# Beispiel: Fast symplektische Struktur ($n = 4$)

- 2-Form als Schnitt in $\mathcal{F} = \bigwedge^2 T^* X$:

$$\omega = \omega_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{14}\, dx^1 \wedge dx^4 + \omega_{24}\, dx^2 \wedge dx^4 + \dots$$

- $\pi_1^2 : \mathcal{R}_2(\omega) \to \mathcal{R}_1(\omega)$ ist surjektiv, falls:

$$\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x^4} - \frac{\partial \omega_{14}}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_{24}}{\partial x^1} = 0, \dots$$

# Beispiel: Fast symplektische Struktur ($n = 4$)

- 2-Form als Schnitt in $\mathcal{F} = \bigwedge^2 T^*X$:

$$\omega = \omega_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{14}\, dx^1 \wedge dx^4 + \omega_{24}\, dx^2 \wedge dx^4 + \dots$$

- $\pi_1^2 : \mathcal{R}_2(\omega) \to \mathcal{R}_1(\omega)$ ist surjektiv, falls:

$$\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x^4} - \frac{\partial \omega_{14}}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_{24}}{\partial x^1} = 0, \dots$$

- Die äußere Ableitung von $\omega$:

$$d\omega = \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x^4} - \frac{\partial \omega_{14}}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_{24}}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + \dots$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_1 = \bigwedge^3 T^*X$

- Jedes $\omega$ muß die gleichen Bedingungen erfüllen:

$$B(u) = c(u) = 0.$$

# Beispiel: Riemannsche Struktur

- $\mathcal{F} = S^2 T^* X$, Metrik $g$:

$$\mathcal{R}_1(g): \qquad y^i_k\, y^j_l\, g_{ij}(y) = g_{kl}(x)$$

- Achtung: Symbol nicht 2-azyklisch $\rightsquigarrow$ 1. Prolongation

# Beispiel: Riemannsche Struktur

- $\mathcal{F} = S^2T^*X$, Metrik $g$:

$$\mathcal{R}_1(g): \qquad y^i_k\, y^j_l\, g_{ij}(y) = g_{kl}(x)$$

- Achtung: Symbol nicht 2-azyklisch $\rightsquigarrow$ 1. Prolongation
- $\mathcal{F}' = S^2T^*X \times \mathcal{F}_\Gamma$, Metrik + Christoffelsymbole:

$$\mathcal{R}_2(g,\Gamma): \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y^i_k\, y^j_l\, g_{ij}(y) & = & g_{kl}(x) \\ y^s_j\, y^r_k\, \Gamma^t_{sr}(y) + y^t_{jk} & = & y^t_i\, \Gamma^i_{jk}(x) \end{array} \right.$$

# Beispiel: Riemannsche Struktur

- $\mathcal{F} = S^2T^*X$, Metrik $g$:

$$\mathcal{R}_1(g): \qquad y^i_k\, y^j_l\, g_{ij}(y) = g_{kl}(x)$$

- Achtung: Symbol nicht 2-azyklisch $\rightsquigarrow$ 1. Prolongation
- $\mathcal{F}' = S^2T^*X \times \mathcal{F}_\Gamma$, Metrik + Christoffelsymbole:

$$\mathcal{R}_2(g,\Gamma): \qquad \begin{cases} y^i_k\, y^j_l\, g_{ij}(y) &= g_{kl}(x) \\ y^s_j\, y^r_k\, \Gamma^t_{sr}(y) + y^t_{jk} &= y^t_i\, \Gamma^i_{jk}(x) \end{cases}$$

- Integrabilitätsbedingungen

$$\Gamma^k_{ij}(x) - \frac{1}{2} g^{k\mu} \left( \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \right) = 0,$$

Krümmungstensor:

$$R^k_{lij} = \partial_i \Gamma^k_{lj} - \partial_j \Gamma^k_{li} + \Gamma^r_{lj}\Gamma^k_{ri} - \Gamma^r_{li}\Gamma^k_{rj} = c_1(\delta^k_j g_{li} - \delta^k_i g_{lj})$$

keine Indizes

# Beispiel: Riemannsche Struktur

- $\mathcal{F} = S^2T^*X$, Metrik $g$:

$$\mathcal{R}_1(g): \qquad y^i_k\, y^j_l\, g_{ij}(y) = g_{kl}(x)$$

- Achtung: Symbol nicht 2-azyklisch $\rightsquigarrow$ 1. Prolongation
- $\mathcal{F}' = S^2T^*X \times \mathcal{F}_\Gamma$, Metrik + Christoffelsymbole:

$$\mathcal{R}_2(g,\Gamma): \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y^i_k\, y^j_l\, g_{ij}(y) & = & g_{kl}(x) \\ y^s_j\, y^r_k\, \Gamma^t_{sr}(y) + y^t_{jk} & = & y^t_i\, \Gamma^i_{jk}(x) \end{array} \right.$$

- Integrabilitätsbedingungen

$$\Gamma(x) - \frac{1}{2} g^{-1} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0,$$

Krümmungstensor:

$$R = \partial\Gamma - \partial\Gamma + \Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma = c_1(\delta g - \delta g) + c_2\sqrt{\det g}$$

Indizes

# Verschiedene Metriken auf der $S^2$

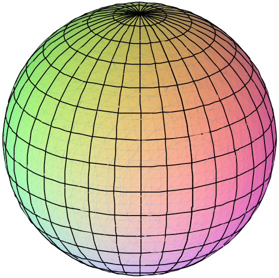
Einbettung als $S^2$: $\quad x^2+y^2+z^2=1$

- Koordinaten: $\theta, \varphi$
- Metrik

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

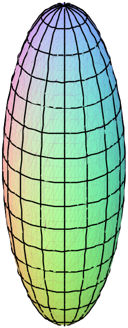
- Integrabilitätsbedingungen:

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 0$$



# Verschiedene Metriken auf der $S^2$

Einbettung als Ellipsoid: $x^2+y^2+\frac{z^2}{9}=1$



- Metrik

$$g=\begin{pmatrix} 3-2\cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

- Integrabilitätsbedingungen: $c_2=0$,

$$c_1=\frac{3}{(3-2\cos^2(\theta))^3}$$

$\rightsquigarrow$ keine Konstante!

# Ausblick

- Alternative Formulierungen durch
  - Jetbündel $J_q(X \times X)$ und
  - Jetgruppoide $\mathcal{R}_q \subseteq \Pi_q(X \times X)$
- Infinitesimale Aspekte: Algebroide $R_q$
- Symbole, 2-Azyklizität
- Klassifikation der Integrabilitätsbedingungen
  $\rightsquigarrow$ Konstanten $c_1$, $c_2$
  $\rightsquigarrow$ Jacobibedingungen, z. B. $c_2 = 0$
- nicht integrable Jetgruppoide
  $\rightsquigarrow$ prolongiere und projiziere mehrfach

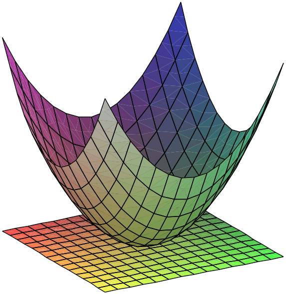
Ende

# Anhang

# Beispiel 2

Metrik

$$g = (1+(x^1)^2+(x^2)^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Gleichungen:

$$\begin{aligned}
[(y^1_1)^2 + (y^2_1)^2]\,(1 + (y^1)^2 + (y^2)^2) &= 1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 \\
[y^1_1\, y^2_2 + y^1_2\, y^2_1]\,(1 + (y^1)^2 + (y^2)^2) &= 0 \\
[(y^1_2)^2 + (y^2_2)^2]\,(1 + (y^1)^2 + (y^2)^2) &= 1 + (x^1)^2 + (x^2)^2
\end{aligned}$$

▸ keine Gleichungen